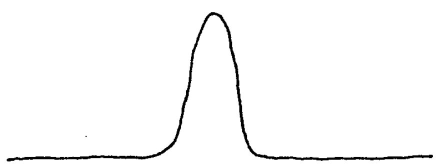
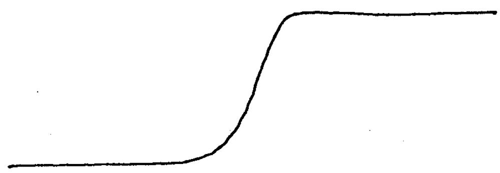
トポロジカル欠陥と非平衡

九大理 物理 川崎恭治

動的臨界現象に代表されるような従来の非平衡相転移現象では，平面波的な秩序変数のゆらぎやその間の非線型結合が主役であった。しかしこれと相補的な局在励起（或はソリトン的励起）が主役を演じる現象が注目を集めつつある。このようなものの典形として昔から知られているのは一次相転移の動力学に現われる核生成の問題である。関連する問題としてはスピノダル分解の後期過程で現われる界面の動力学や層状物質の秩序化過程で現われるキンクの動力学である。更に過冷却液体やアモルファス固体等もこの様な欠陥の集合として理解されつつある。ここで欠陥やソリトンはトポロジカルなものであると云う点が重要である。この点を説明するためにKdV方程式等で出てくるパルスソリトンとsine-Gordon方程式に出てくるキンクソリトンを比較してみる。



パルスソリトン



キンクソリトン

パルスソリトンを作るには一様な状態において局所的に変化をおこせばよい。又これをつぶすにはソリトンのある所だけ変化させればよい。一方，キンクソリトンではソリトンの右半分又は左半分の状態をすべて変化させなければならない。又ソリトンができてしまったならばソリトンの近傍だけいくら変化させても，ソリトンの形が多少変るだけでソリトンそのものはなくならない。したがってキンクソリトンは安定性が甚だ高い。この事は云いかえればキンクソリトンは保存則：（キンクソリトンの数）－（反キンクソリトンの数）＝一定 をみたしているからである。一方，エネルギー的にはパルスソリトンもキンクソリトンも一般に同程度である。キンクソリトンはトポロジカルな欠陥の典形で，一般にトポロジカルな欠陥は保存則のために安定性が高く，したがって寿命が長く，僅かの励起エネルギーで非常に大きな状態の変化を伴う。これらの事を考えただけでも，トポロジカルな欠陥が非平衡現象で果すであろう役割りの重要さを想像することができる。高次元系における保存則の例として結晶の転位線，液体ヘリウムの渦糸，液晶のdisclination line，アモルファス固体のRivier線やfrustration lineは体系内では必ず閉曲線を作る事があげられよう。

上で述べた事の一つの帰結としてトポロジカル欠陥の性質を，欠陥の存在する点以外の所での状態によって特徴づけることができる。例えば液体^{4}Heの渦糸のまわりの閉曲線を一周すれば秩序変数の位相が2πだけ変化する。又液晶のdisclination lineではdirectorの方向が$2\pi m$だけ変化する。ここでmはdisclinationの強さをあらわす。この閉曲線

のとり方は一意的ではなく互に連続的な変形によってうつり変ることができる（このことをホモトピックと呼ぶ）同値な閉曲線の集合を考えることができる。更に同値な閉曲線の集合の全体を考えると，これは同値な集合を一つの元とする群を成していることが示される。今の場合この群を一次元ホモトピー群と云う。欠陥の安定性は，ホモトピー群の異った元で表わされる状態は自由に移り変ることができないと云う形で表現される。例えば強さの異ったdisclinationをもつ状態の間は自由に移り変れない。所で今度はこの事を逆手にとり，欠陥のトポロジーを変えない自由な変化に対して不変になるような理論をつくることもできる。これがVIで簡単に触れるゲージ理論である。

今液体 ^4He を例にとりゲージ理論を説明する。複素秩序変数 $\psi(\mathbf{r})$ に対する Ginzburg-Landau 自由エネルギー

$$H\{\psi\} = \int d\mathbf{r}\left\{\frac{1}{2m}|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + P(|\psi(\mathbf{r})|^2)\right\} \qquad (1)$$

を考える。$|\psi(\mathbf{r})|$は渦糸の中心では零，はなれると $\psi_0\ (>0)$ となる。したがって中心ではψの位相は特異的になる。特異的でない領域に限れば位相 $\varphi(\mathbf{r})$ は well-defined であるが多価である。即ち渦糸をまわれば 2π だけ変化する。これをあらわすために

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \nabla\tilde{\varphi}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad (2)$$

とおく。ここで$\tilde{\varphi}$は一価で $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は多価である効果をあらわすベクトルポテンシャルである。新しい秩序変数

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \psi_0\, e^{i\tilde{\varphi}(\mathbf{r})} \qquad (3)$$

を定義すれば(1)を変形し，小さな項（渦糸の太さを含む）を無視すると，次の結果を得る：

$$H\{\psi\} = \frac{1}{2m}\int d\mathbf{r}\,|\mathbf{D}(\mathbf{r})\tilde{\psi}(\mathbf{r})|^2 + g\int d\mathbf{r}\,|\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})|^2 \qquad (4)$$

ここで g はある定数で $\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \nabla + i\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は共変微分である。(4) は $\chi(\mathbf{r})$ を任意な関数とする下記のゲージ変換に対して不変である。

$$\tilde{\psi} \to e^{i\chi}\tilde{\psi}, \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla\chi \qquad (5)$$

この様な理論はゲージ変換が非可換であるような液晶の場合にもつくることができる。[1] 更に非平衡問題についても拡張を試みている。この様な話は理論家の遊びと思われるかも知れないが多数の欠陥が複雑にからみあった場合を扱うのに有用な枠組になるのではなかろうか。

1) K. Kawasaki and H. R. Brand, to be published

一般的な文献として

I. Dzyaloshinskii, in Physics of Defects, eds. Balian, Kléman, Poirier (North-Holland, 1982)

N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 591

N. Rivier, in Topological Disorder in Condensed Matter, eds. Yonezawa and Ninomiya (Springer, 1983)